

Глава 3. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. СИЛЫ. НАПРЯЖЕНИЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Силы и соответствующие им поля в МСС

Силы, действующие на вещество, можно подразделить на два вида:

- I. Силы дальнего действия, или дальнодействующие силы;
- II. Силы ближнего действия, или близкодействующие силы;

Эти два вида сил в МСС описываются с помощью разных математических величин (“объектов”).

Объемные (массовые) силы. Плотность объемных сил. Силы дальнего действия или дальнодействующие силы – это инерционные, гравитационные, электрические, магнитные силы, которые “проникают” внутрь вещества, распределяются по объему вещества и действуют на все элементы (материальные частицы) вещества. Поэтому эти силы называются объемными или массовыми.

В МСС дальнодействующие силы (т.е. объемные или массовые) описываются с помощью векторного поля плотности массовых сил $\rho\mathbf{F}$, которое вводится аналогично полю $\rho(\mathbf{x}, t)$, описанному в § 2 гл. 2 и которое обладает свойствами устойчивости, представительности и регулярности. Сила \mathbf{F} , действующая на вещество в произвольном объеме V , с помощью поля $\rho(\mathbf{x}, t)$ $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ рассчитывается в виде объемного интеграла (ср. с (2.2.13)):

$$\mathbf{F} = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) F(\mathbf{x}, t) dV, \quad (3.1.1)$$

а сила, действующая на элементарный объем dV вокруг точки M , задаваемой радиус-вектором \mathbf{x} , равна дифференциалу (ср. с (2.2.13а)):

$$d\mathbf{F} = \rho(\mathbf{x}, t) F(\mathbf{x}, t) dV. \quad (3.1.1a)$$

Силы инерции выделяются отдельно из внешних массовых сил и описываются полем $\rho\mathbf{a}$, где \mathbf{a} – ускорение материальной частицы (см. § 6) Также как и поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, поле $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ является устойчивым, представительным и регулярным. При этом сила инерции $d\mathbf{F}^{\text{in}}$ на элементарный объем вещества объемом dV равна

$$d\mathbf{F}^{\text{in}} = \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dV. \quad (3.1.2)$$

Число различных объемных (массовых) сил невелико. Помимо сил инерции в механике сплошной среды это или гравитационные силы (в частности, силы тяжести), плотность которых будем обозначать через \mathbf{g} или электромагнитные (пондеромоторные) силы, плотность которых будем обозначать через \mathbf{R} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{g} + \mathbf{R}. \quad (3.1.3)$$

Поверхностные силы. Вектор напряжения. Силы близкого действия или близкодействующие силы – это силы, связанные с молекулярным взаимодействием в веществе, которые убывают на расстояниях, равных по порядку межмолекулярным, т.е. “нулевым” с точки зрения МСС. Эти силы проявляются только тогда, когда расстояния между взаимодействующими элементами вещества равны по порядку межмолекулярным расстояниям.

Близкодействующие силы проявляются на границах физического тела и внутри него. Поэтому близкодействующие силы называют еще и внутренними.

В разреженном газе силы близкого действия проявляются за счет ударов молекул. В конденсированных телах (жидких и твердых телах) близкодействующие силы помимо ударов молекул проявляются за счет молекулярных сил отталкивания, притяжения, сцепления. Этими межмолекулярными силами определяются такие макроскопические свойства физических тел, как: сжимаемость, упругость, вязкость, пластичность, прочность.

Близкодействующие силы действуют лишь на тонкий слой вдоль границы выделенного тела и определяются площадью этой границы. Поэтому в отличие от объемных сил силы близкого действия называются еще и поверхностными. Причем помимо площади и местоположения границы эти силы зависят от направления поверхности границы, характеризуемой единичной внешней нормалью \mathbf{n} , внешней по отношению к веществу, на которое рассматривается силовое воздействие. Для того, чтобы ввести параметры, характеризующие близкодействующие или поверхностные силы в физическом

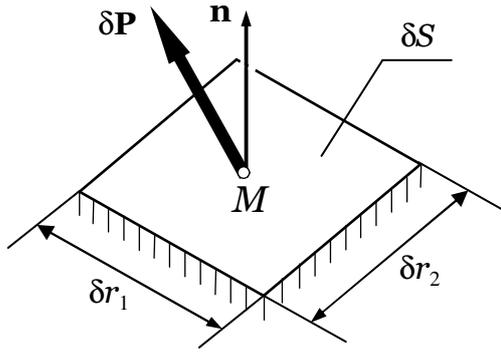


Рис. 3.1.1.

теле в окрестности точки M , проведем через нее плоское сечение δS с единичной нормалью \mathbf{n} (рис. 3.1.1). Характерные размеры этого сечения δr_1 и δr_2 будем полагать величинами одного порядка ($\delta r_1 \sim \delta r_2 \sim \delta r_3$). Часть вещества, которая расположена с той стороны от δS , куда направлена нормаль \mathbf{n} будет

называться внешней частью, а та часть, откуда исходит нормаль \mathbf{n} , будет называться внутренней частью.

Задача состоит в описании воздействия внешней части на внутреннюю вдоль сечения δS . Пусть $\delta \mathbf{P}(\mathbf{n})$ сила этого воздействия. Тогда средняя интенсивность (среднее напряжение) этого силового воздействия, приходящаяся на единицу площади δS (аналог $\tilde{\rho}$ в § 2 п. 2) обозначим через $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{n})$:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{n}) = \frac{\delta \mathbf{P}(\mathbf{n})}{\delta S}. \quad (3.1.4)$$

Аналогично (2.2.7) естественно полагать, что, если около сечения δS находится много молекул ($\delta r \gg l_{am}$) или других дискретных элементов и в то же время размер δr мал по сравнению с характерным размером L рассматриваемого тела, т.е. если выполняется условие (2.2.6), то напряжение можно считать *устойчивым* или практически независимым от формы и размера (δr) сечения δS , или, другими словами, зависимость $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{n})$ от $\delta \mathbf{r}$ имеет “обширное плато” (аналогично зависимости $\tilde{\rho}$ от δr на рис. 2.8.1 при фиксированном \mathbf{n}). Значение $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{n})$, соответствующее “плато”, и примем за значение напряжения $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n})$ в точке M , являющейся центром δS :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{n}) \quad \text{при} \quad (l_{at} \ll \Delta_{\min} < \delta r < \Delta_{\max} \ll L).$$

Таким образом, аналогично (2.2.12) в каждой точке определяется векторная функция локального напряжения

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t), \quad (3.1.5)$$

зависящая не только от координат \mathbf{x} и времени t , но и от направления внеш-

ней нормали \mathbf{n} к площадкам δS .

Аналогично (2.2.13) величину $\boldsymbol{\sigma}$ будем полагать *представительной*. Это означает, что поверхностная или близкодействующая сила на рассматриваемое физическое тело вдоль произвольной поверхности S определяется в соответствии с моделью континуума поверхностным интегралом

$$\mathbf{P} = \int_S \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) dS, \quad (3.1.16)$$

а вдоль элементарной поверхности dS около точки M (задаваемой радиус-вектором \mathbf{x}) – дифференциалом

$$d\mathbf{P} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) dS \quad (dS \sim (dr)^2, l_{\text{ат}} \ll dr \ll L). \quad (3.1.17)$$

Аналогично (2.2.15) функцию $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$ будем полагать *регулярной* на расстояниях L :

$$\left| \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x} \right| \leq \frac{\sigma_0}{L}, \quad (3.1.18)$$

где σ_0 – характерное значение абсолютной величины напряжения $\boldsymbol{\sigma}$.

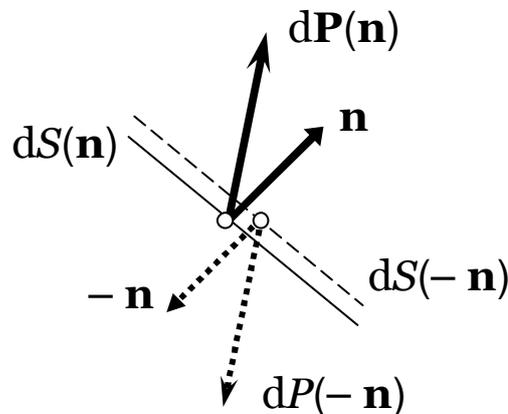


Рис. 3.1.2.

В соответствии с принятым обозначением сила со стороны внутренней части вектора (определяемой нормалью \mathbf{n}) на внешнюю часть вдоль поверхности dS обозначается через $dP(-\mathbf{n})$ (см. рис. 3.1.2), а соответствующее напряжение через $\boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$. По третьему закону Ньютона (действие равно противодействию) $dP(-\mathbf{n}) = -dP(\mathbf{n})$.

Поэтому, если разделить последнее равенство на dS , получим

$$\boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t), \quad (3.1.19).$$

т.е. функция $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n})$ является нечетной.

Ниже будет показано, что все множество значений $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n})$ при различных направлениях сечения, определяемых нормальми \mathbf{n} , в фиксированной точке (\mathbf{x}) и фиксированный момент времени (t) определяется тензором 2-го ранга $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$, для которого $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n})$ является вектор–проекцией на направление \mathbf{n} . Т.е. множество $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n})$ определяется девятью и даже, как правило, шестью (из-за симметрии тензора) числами (см. ниже § 2).

Как и все поля в МСС континуальное поле $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$ есть приближенная модель для описания близкодействующих внутренних сил в физических телах в масштабах, во много раз превышающих расстояния между молекулами или размеры дискретных частиц.

§ 2. Тензор напряжений (Stress Tensor)

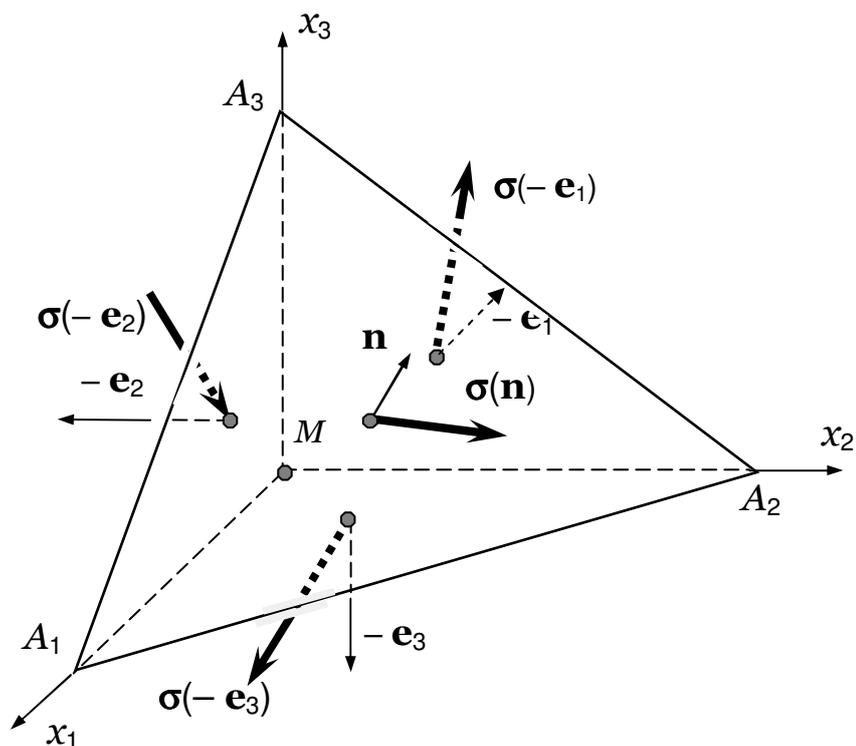


Рис.3.2.1

Для анализа связей между значениями $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n})$ в фиксированной точке для различных направлений \mathbf{n} выделим в исследуемом с помощью модели континуума физическом теле тетраэдр (рис. 3.2.1), ограниченный тремя координатными плоскостями, проходящими через заданную точку M , и одной плоскостью, внешняя (по отношению к тетраэдру) нормаль к которой $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$. Система координат декартова. Внешними (по отношению к выделенному тетраэдру) нор-

малями к координатным плоскостям или граням A_2A_3M , A_1A_3M , A_1A_2M являются единичные вектора – \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 , а площади соответствующих граней S_1 , S_2 , S_3 равны

$$\begin{aligned} S_1 &= S_{(n)} \cos(\mathbf{n} \mathbf{e}_1) = S_{(n)} n_1 \quad (\Delta A_2A_3M), \\ S_2 &= S_{(n)} \cos(\mathbf{n} \mathbf{e}_2) = S_{(n)} n_2 \quad (\Delta A_1A_3M), \\ S_3 &= S_{(n)} \cos(\mathbf{n} \mathbf{e}_3) = S_{(n)} n_3 \quad (\Delta A_1A_2M), \\ \text{т.е. } S_i &= S_{(n)} n_i \quad (i=1, 2, 3), \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

где $S_{(n)}$ – площадь наклонной к координатным плоскостям грани $A_1A_2A_3$ с нормалью \mathbf{n} . Объём тетраэдра V равен

$$V = \frac{1}{3} S_{(n)} h, \quad (3.2.2)$$

где h – высота тетраэдра, опущенная из точки M на грань $S_{(n)}$.

В соответствии с принятыми обозначениями в модели континуума напряжения $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n})$ вдоль граней S_1 , S_2 , S_3 , $S_{(n)}$ на вещество, находящееся внутри тетраэдра, обозначается соответственно через величины (см. рис. 3.2.1)

$$\boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{e}_1), \quad \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{e}_2), \quad \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{e}_3), \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}), \quad (3.2.3)$$

В соответствии с 3-м законом Ньютона (см. (3.1.9)) имеем

$$\boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{e}_i) = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_i) \quad (i=1, 2, 3). \quad (3.2.3)$$

Для сокращения записи указатель нормали \mathbf{n} или \mathbf{e}_i перенесём в нижний индекс, т.е. будем отмечать нижним индексом i или n (см. рис. 3.2.1)

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{x}, t) \quad (i=1, 2, 3). \quad (3.2.4)$$

При этом все напряжения в (3.2.3)–(3.2.5) являются функциями координат и времени:

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{x}, t) \quad (i=1, 2, 3). \quad (3.2.5)$$

Уравнения равновесия поверхностных сил в точке. Уравнение движения (2-й закон Ньютона) сплошной среды, находящегося в произвольном объёме V , ограниченном поверхностью S , когда вещество внутри V подвержено действию только объёмных и поверхностных сил, записывается в виде уравнения равновесия:

$$\int_V \rho(\mathbf{F} - \mathbf{a})dV + \int_S \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)dS = 0, \quad (3.2.6)$$

где \mathbf{F} – интенсивность внешних объемных сил, \mathbf{a} – ускорение материальных точек, определяющих интенсивность сил инерции.

Рассмотрим его уравнение для предоставленного на рис. 3.2.1 тетраэдра.

Интеграл по объему тетраэдра можно оценить по теореме о среднем

$$\int_V \rho(\mathbf{F} - \mathbf{a})dV = \rho(\tilde{M})[\mathbf{F}(\tilde{M}) - \mathbf{a}(\tilde{M})]V, \quad (3.2.7)$$

где значения $\rho(\tilde{M})$, $\mathbf{F}(\tilde{M})$, $\mathbf{a}(\tilde{M})$ берутся в некоторой точке \tilde{M} внутри тетраэдра. Их можно выразить через значения соответствующих функций в точке M (в вершине тетраэдра) и остаточные члены, достаточно малые при $h \rightarrow 0$ в силу регулярности типа (2.2.15) функций $\rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$:

$$\rho(\tilde{M}) = \rho(M) + \rho_0 O(h/L), \quad \mathbf{F}(\tilde{M}) = \mathbf{F}(M) + F_0 O(h/L). \quad (3.2.8)$$

Здесь ρ_0 , σ_0 , F_0 , a_0 – характерные абсолютные значения соответственно ρ , $|\boldsymbol{\sigma}|$, $|\mathbf{F}|$, $|\mathbf{a}|$; L – характерное расстояние, на котором заметно меняются обсуждаемые функции. В итоге для объёмного интеграла (3.2.7) получим

$$\begin{aligned} \int_V \rho(\mathbf{F} - \mathbf{a})dV &= \left[\rho(M) + O\left(\frac{\rho_0 h}{L}\right) \right] \left[\mathbf{F}(M) - \mathbf{a}(M) + O\left(\frac{(F_0 + a_0)h}{L}\right) \right] V = \\ &= \rho(M)[\mathbf{F}(M) - \mathbf{a}(M)]V + V\rho_0(F_0 + a_0)O(h/L). \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Поверхностная сила, действующая вдоль площадки S_1 , в соответствии с представительностью поля $\boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{e}_1, \mathbf{x}, t) \equiv -\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x}, t)$, записывается в виде интеграла типа (3.1.6):

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{e}_1, \mathbf{x}, t)dS = -\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x}, t)dS = -\boldsymbol{\sigma}_1(M_1)S_1. \quad (3.2.10)$$

Здесь использована теорема о среднем, а $\boldsymbol{\sigma}_1(M_1)$ – значение $\boldsymbol{\sigma}_1$ в некоторой точке M_1 (в момент времени t), лежащей на грани S_1 . Вследствие регулярности поля $\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x}, t)$ (см. (3.1.8)), аналогично (3.2.8) величину $\boldsymbol{\sigma}_1(M_1)$ можно выразить через $\boldsymbol{\sigma}_1(M)$:

$$\boldsymbol{\sigma}_1(M_1) = \boldsymbol{\sigma}_1(M) + \sigma_0 O(h/L). \quad (3.2.11)$$

Аналогично представляются поверхностные силы вдоль граней S_2 , S_3 и $S_{(n)}$. В результате сумма поверхностных сил по поверхности тетраэдра представляется в виде

$$\begin{aligned} \int_{S_1+S_2+S_3+S_n} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) dS &= -[\boldsymbol{\sigma}_1(M) + \sigma_0 O(h/L)] S_1 - [\boldsymbol{\sigma}_2(M) + \sigma_0 O(h/L)] S_2 - \\ &- [\boldsymbol{\sigma}_3(M) + \sigma_0 O(h/L)] S_3 + [\boldsymbol{\sigma}_n(M) + \sigma_0 O(h/L)] S_{(n)} = \\ &= [-n_1 \boldsymbol{\sigma}_1(M) - n_2 \boldsymbol{\sigma}_2(M) - n_3 \boldsymbol{\sigma}_3(M) + \boldsymbol{\sigma}_n + \sigma_0 O(h/L)] S_{(n)}. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Здесь учтены выражения (3.2.1).

В результате в рамках континуальной модели уравнение движения (2-й закон Ньютона) для материальной частицы внутри тетраэдра, сводящееся к условию равновесия сил инерции, внешних массовых сил и поверхностных сил, представленных в (3.2.9), (3.2.12), записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} S_n h [\rho(\mathbf{F} - \mathbf{a}) + \rho_0(F_0 + a_0) O(h/L)] + \\ + S_{(n)} [\boldsymbol{\sigma}_{(n)} - \boldsymbol{\sigma}_1 n_1 - \boldsymbol{\sigma}_2 n_2 - \boldsymbol{\sigma}_3 n_3 + \sigma_0 O(h/L)] = 0, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

где значения ρ , \mathbf{F} , \mathbf{a} , $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}$, $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_3$ взяты в одной точке – точке M . Разделив уравнение на $S_{(n)}$, получим

$$\boldsymbol{\sigma}_{(n)} - \boldsymbol{\sigma}_1 n_1 - \boldsymbol{\sigma}_2 n_2 - \boldsymbol{\sigma}_3 n_3 + h [\rho(\mathbf{F} - \mathbf{a}) + O\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right) + \rho_0(F_0 + a_0) O(h/L)] = 0. \quad (3.2.14)$$

Это уравнение справедливо при любых h . Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, получим, что слагаемые, представляющие массовые и инерционные силы, вместе со слагаемыми из-за переменности $\boldsymbol{\sigma}$ по пространству стремятся к нулю. В результате получаем уравнение равновесия поверхностных сил в точке, позволяющее определять локальное напряжение в данной точке на площадке с произвольным наклоном через локальное напряжение в этой же точке на координатных площадках

$$\boldsymbol{\sigma}_{(n)} = \boldsymbol{\sigma}_1 n_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 n_2 + \boldsymbol{\sigma}_3 n_3 \equiv \boldsymbol{\sigma}_i n_i. \quad (3.2.15)$$

Выражение в квадратных скобках уравнения (3.2.14) должно равняться нулю при любых h . Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$ аналогично (3.2.15) получим оценку

$$\rho \mathbf{a} = \mathbf{O} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) + \rho \mathbf{F}. \quad (3.2.16)$$

Более точная оценка членов порядка $O(\partial \sigma / \partial x)$ позволит вывести уравнение движения, позволявшее связать массовые силы с производными по координатам от поверхностных сил (см. ниже (3.2.35)).

Таким образом, напряжение в заданной точке в любом сечении, определяемом нормалью \mathbf{n} или, другими словами, напряженное состояние в заданной точке определяется тремя векторами

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \equiv \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_1), \quad \boldsymbol{\sigma}_2 \equiv \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_2), \quad \boldsymbol{\sigma}_3 \equiv \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_3).$$

Проекции этих векторов на координатные оси будем отмечать первым индексом, а вторым индексом – "номер" напряжения:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \sigma_{j1} \mathbf{e}_j, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \sigma_{j2} \mathbf{e}_j, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \sigma_{j3} \mathbf{e}_j \quad (3.2.17)$$

или

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \sigma_{ji} \mathbf{e}_j.$$

Компоненты σ_{ji} – компоненты трех векторов образуют матрицу

$$(\sigma_{ji}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.2.18)$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ \boldsymbol{\sigma}_1 & \boldsymbol{\sigma}_2 & \boldsymbol{\sigma}_3 \end{array}$$

столбцы которой дают компоненты векторов $\boldsymbol{\sigma}_i$.

Рассмотрим как преобразуются эта матрица при преобразовании координат. Пусть x'_1, x'_2, x'_3 с базисными векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – новая декартовая координатная система

$$\mathbf{e}'_1 = \alpha_{1j} \mathbf{e}_j \quad (n_j = \alpha_{1j}), \quad \mathbf{e}'_2 = \alpha_{2j} \mathbf{e}_j \quad (n_j = \alpha_{2j}), \quad \mathbf{e}'_3 = \alpha_{3j} \mathbf{e}_j \quad (n_j = \alpha_{3j}). \quad (3.2.19)$$

Согласно (3.2.15)

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}'_1) \equiv \boldsymbol{\sigma}'_1 = \alpha_{1j} \boldsymbol{\sigma}_j, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}'_2) \equiv \boldsymbol{\sigma}'_2 = \alpha_{2j} \boldsymbol{\sigma}_j, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}'_3) \equiv \boldsymbol{\sigma}'_3 = \alpha_{3j} \boldsymbol{\sigma}_j,$$

$$\text{т.е.} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}'_i) = \alpha_{ij} \boldsymbol{\sigma}_j. \quad (3.2.20)$$

Умножая эти равенства на $\mathbf{e}'_k = \alpha_{kl} \mathbf{e}_l$, получим

$$\boldsymbol{\sigma}'_i \mathbf{e}'_k = \alpha_{ij} \boldsymbol{\sigma}_j \cdot \alpha_{kl} \mathbf{e}_l, \quad \text{т.е.} \quad \boldsymbol{\sigma}'_{ki} = \alpha_{ij} \alpha_{kl} \boldsymbol{\sigma}_{li}. \quad (3.2.21)$$

В результате согласно определению (см. § 4 гл. 1) получаем, что $\mathbf{S} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ – тензор 2-го ранга.

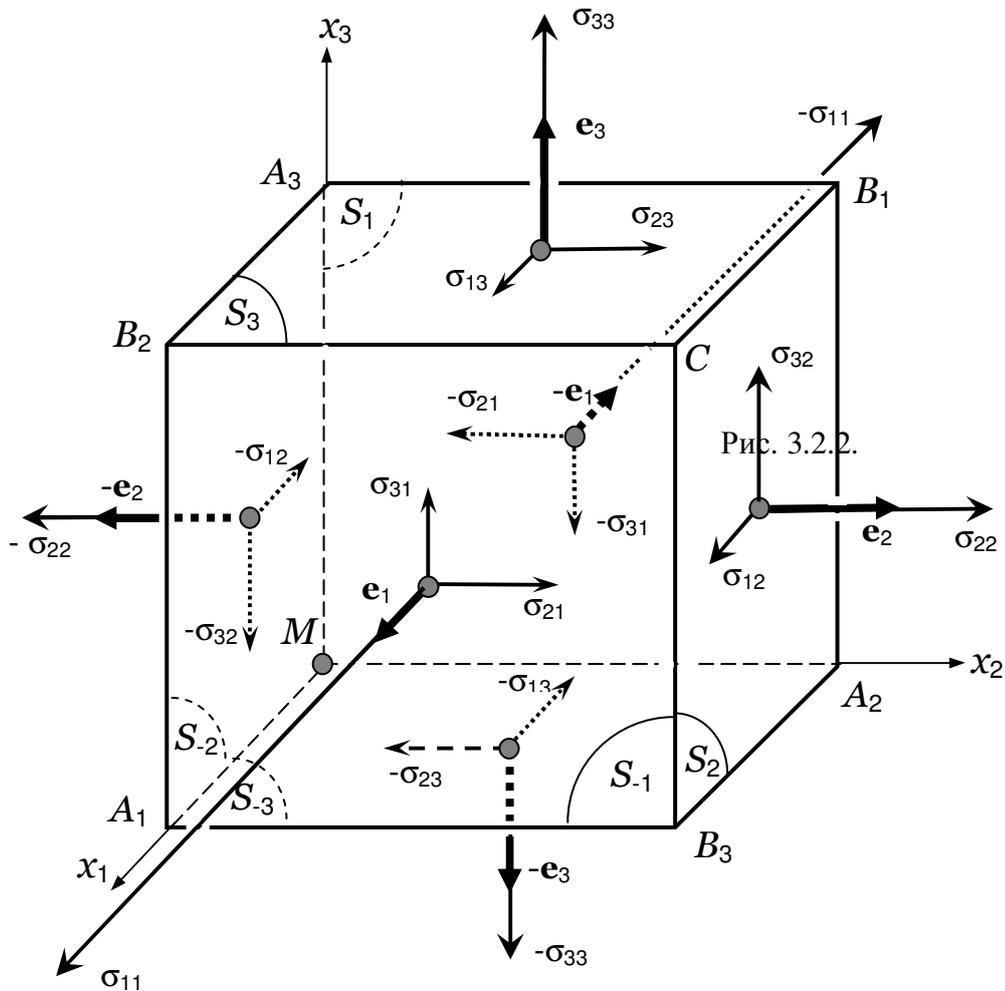


Рис. 3.2.2.

Физический смысл компонент тензора напряжений. Выделим кубический объем сплошной среды с вершиной в точке M и гранями, совпадающими с координатными плоскостями, так что начало координат находится в точке M (см. рис. 3.2.2). Грань куба $A_1B_2CB_3$, имеющую внешнюю (по отношению к кубу) нормаль $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ обозначена через S_1 , а противоположную ей грань с внешней нормалью $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$ обозначена через S_{-1} . Аналогично грань $CB_1A_2B_3$ с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$ и грань $MA_3B_2A_1$ с нормалью $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_2$ обозначены соответственно через S_2 и S_{-2} , а грань $CB_1A_3B_2$ с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ и грань $MA_2B_3A_1$ с нормалью $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_3$ обозначены через S_3 и S_{-3} .

На рис. 3.2.2 указатели $S_1, S_2, S_3, S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}$ поставлены в углах соответствующих граней. В этих центрах жирными стрелками показаны соответствующие нормали $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_{-2}, \mathbf{e}_{-3}$.

На гранях S_1, S_2, S_3 с нормальями $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ напряжения, согласно (3.2.5), обозначаются соответственно через $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3$ ($\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{e}_i), i = 1, 2, 3$). Разлагая напряжения $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3$ по координатным осям, увидим, что компоненты с

одинаковыми индексами

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33} \quad (3.2.22)$$

показывают нормальные на соответствующих гранях составляющие напряжения (сжатия и растяжения), а компоненты с разными индексами

$$\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32} \quad (3.2.23)$$

показывают касательные или сдвиговые напряжения на соответствующих гранях.

На противоположные грани S_{-1}, S_{-2}, S_{-3} с нормальными $-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3$ напряжения, согласно (3.2.4), (3.2.5), соответственно равны

$$\begin{aligned} \sigma(-\mathbf{e}_1) = -\sigma(\mathbf{e}_1) = -\sigma_1, \quad \sigma(-\mathbf{e}_2) = -\sigma(\mathbf{e}_2) = -\sigma_2, \quad \sigma(-\mathbf{e}_3) = -\sigma(\mathbf{e}_3) = -\sigma_3 \\ (\sigma(-\mathbf{e}_i) = -\sigma(\mathbf{e}_i) = -\sigma_i, \quad i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Т.е. при одних и тех же значениях напряжений σ_1 на противоположных площадках S_1 и S_{-1} поверхностные силы на вещество внутри куба вдоль площадок S_1 и S_{-1} направлены в противоположные стороны и уравновешивают друг друга.

Аналогично для противоположных площадок S_2 и S_{-2}, S_3 и S_{-3} . Нормальные составляющие напряжений (3.2.22) характеризуют сопротивление среды на сжатие (если соответствующая составляющая отрицательная) или растяжение (если соответствующая составляющая положительная) вдоль соответствующих координатных площадок S_1, S_2, S_3 , а касательные составляющие напряжения (3.2.23) характеризуют сопротивление среды сдвигу.

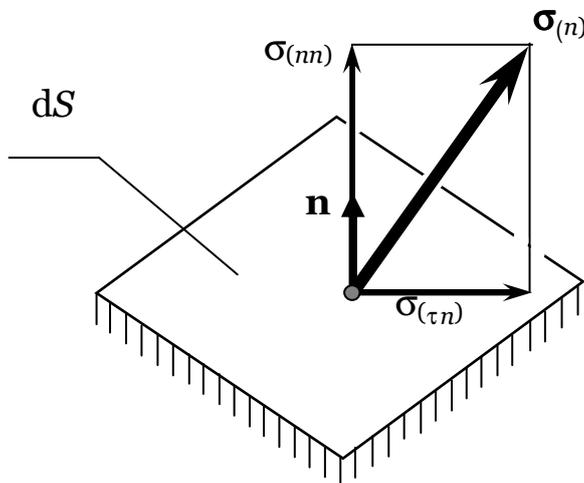


Рис. 3.2.3

Рассмотрим нормальную составляющую напряжения на площадке с произвольной нормалью \mathbf{n} , т.е. про-

екцию напряжения $\boldsymbol{\sigma}_n$ на нормаль \mathbf{n} . Эту проекцию обозначим через $\sigma_{(nn)}$ (см. рис. 3.2.3) и рассчитаем ее, учитывая формулу (3.2.15) В итоге получим

$$\sigma_{(nn)} = \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{n} = \sigma_i n_i \cdot \mathbf{n} = \sigma_i n_i \cdot n_k \mathbf{e}_k = n_i n_k \sigma_i \mathbf{e}_k = \sigma_{ki} n_i n_k. \quad (3.2.25)$$

На рис. 3.2.3 $\sigma_{(nn)} > 0$, что соответствует растягивающим усилиям на площадке dS с нормалью \mathbf{n} . Касательная сдвиговая составляющая $\sigma_{(tn)}$ напряжения $\boldsymbol{\sigma}_n$ на площадке dS нормалью \mathbf{n} определяется из соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{(tn)}^2 &= \sigma_{(n)}^2 - \sigma_{(nn)}^2 = \boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{(n)} - \sigma_{(nn)}^2 = \sigma_i n_i \cdot \sigma_k n_k - \sigma_{ji} n_j n_i \sigma_{lk} n_l n_k = \\ &= \sigma_{ji} n_i \mathbf{e}_j \cdot \sigma_{lk} n_k \mathbf{e}_l - \sigma_{ji} \sigma_{lk} n_j n_i n_l n_k = \sigma_{ji} \sigma_{lk} n_i n_k \delta_{jl} - \sigma_{ji} \sigma_{lk} n_j n_i n_l n_k. \end{aligned}$$

В итоге получим

$$\sigma_{(tn)}^2 = \sigma_{ji} \sigma_{lk} n_i n_k (\delta_{jl} - n_j n_l). \quad (3.2.26)$$

Уравнение импульса (Momentum Equation) сплошной среды в точке.

Получим точное уравнение движения сплошной среды для материальной точки. Приближенный вид этого уравнения представлен в (3.2.16), и его уточнение связано с более точной оценкой поверхностных сил вокруг выделенной точки, т.е. уточнением первого слагаемого в правой части, равного $O(\partial\boldsymbol{\sigma}/\partial x)$.

Применим уравнение движения (3.2.6), справедливое для произвольного объема V , к кубу ($V = h^3$) сплошной среды, и ограниченному поверхностью $S = S_1 + S_{-1} + S_2 + S_{-2} + S_3 + S_{-3}$ и представленному на рис. 3.2.2.

$$\begin{aligned} \int_V \rho (\mathbf{F} - \mathbf{a}) dV &= \int_{S_1} \boldsymbol{\sigma}_1 dS + \int_{S_{-1}} \boldsymbol{\sigma}_{-1} dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\sigma}_2 dS + \\ &+ \int_{S_{-2}} \boldsymbol{\sigma}_{-2} dS + \int_{S_3} \boldsymbol{\sigma}_3 dS + \int_{S_{-3}} \boldsymbol{\sigma}_{-3} dS. \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Интеграл по объему оценивается аналогично (3.2.9).

Первые два поверхностных интеграла по граням куба S_1 и S_{-1} могут быть представлены в виде

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma}_1 dS + \int_{S_{-1}} \boldsymbol{\sigma}_{-1} dS = \int_{S_1} \boldsymbol{\sigma}_1 dS - \int_{S_{-1}} \boldsymbol{\sigma}_1 dS =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{S_{-1}} [\boldsymbol{\sigma}_1(x_1+h, x_2, x_3) - \boldsymbol{\sigma}_1(x_1, x_2, x_3)] dS = \\
&= \int_{S_{-1}} dS \int_{x_1^{(M)}}^{x_1^{(M)}+h} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_1}{\partial x_1} dx_1 = \int_V \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_1}{\partial x_1} dV = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_1}{\partial x_1} \right)_{\tilde{M}} V.
\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

При оценке объемного интеграла использована теорема о среднем, так что производная $(\partial \boldsymbol{\sigma}_1 / \partial x_1)_{\tilde{M}}$ берется в некоторой точке \tilde{M} внутри куба. Эта производная может быть оценена аналогично (3.2.9) через значение этой производной в точке M и остаточный член

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_1}{\partial x_1} \right)_{\tilde{M}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_1}{\partial x_1} \right)_M + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_1}{\partial x_1} \right)_M \right] \delta x_i, \quad \delta x_i \leq h. \tag{3.2.29}$$

Учитывая регулярность производной $(\partial \boldsymbol{\sigma}_1 / \partial x_1)$ в масштабах L (см.(2.2.16) и (3.1.8))

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_1}{\partial x_1} \right) \leq \frac{1}{L} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_1}{\partial x_1} \right)_0 \leq \frac{\sigma_0}{L^2}, \tag{3.2.30}$$

получим

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_1}{\partial x_1} \right)_{\tilde{M}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_1}{\partial x_1} \right)_M + \frac{\sigma_0}{L} \mathcal{O}\left(\frac{h}{L}\right). \tag{3.2.31}$$

В результате поверхностные интегралы по S_1 и S_{-1} в (3.2.27) определяются следующей оценкой

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma}_1 dS + \int_{S_{-1}} \boldsymbol{\sigma}_{-1} dS = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_1}{\partial x_1} \right)_M V + V \frac{\sigma_0}{L} \mathcal{O}\left(\frac{h}{L}\right). \tag{3.2.32}$$

Аналогично оцениваются и интегралы по S_2 и S_{-2} , а также по S_3 и S_{-3} :

$$\begin{aligned}
\int_{S_2} \boldsymbol{\sigma}_2 dS + \int_{S_{-2}} \boldsymbol{\sigma}_{-2} dS &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_2}{\partial x_2} \right)_M V + V \frac{\sigma_0}{L} \mathcal{O}\left(\frac{h}{L}\right), \\
\int_{S_3} \boldsymbol{\sigma}_3 dS + \int_{S_{-3}} \boldsymbol{\sigma}_{-3} dS &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_3}{\partial x_3} \right)_M V + V \frac{\sigma_0}{L} \mathcal{O}\left(\frac{h}{L}\right).
\end{aligned} \tag{3.2.33}$$

В итоге, используя (3.2.9), (3.2.32), (3.2.33) для уравнения (3.2.27) получим более точную оценку уравнения движения, чем в (3.2.13)

$$V \left[\rho(\mathbf{F} - \mathbf{a}) + \rho_0(F_0 - a_0) \mathcal{O}\left(\frac{h}{L}\right) \right] + V \left[\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} + \frac{\sigma_0}{L} \mathcal{O}\left(\frac{h}{L}\right) \right] = 0, \quad (3.2.34)$$

где значения ρ , \mathbf{F} , \mathbf{a} , $\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i}\right)$ взяты в одной точке – точке M .

Это уравнение справедливо для любых $V = h^3$. Потому разделив на V и переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, получим

$$\rho \mathbf{a} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} + \rho \mathbf{F}. \quad (3.2.35)$$

Это уравнение с использованием немого суммирования может быть записано в виде

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla_i \sigma_i + \rho \mathbf{F}. \quad (3.2.35a)$$

Уравнение момента количества движения (Momentum of momentum equation). Уравнение момента количества движения рассмотрим для показанного на рис. 3.2.2 куба сплошной среды, относительно которой точки M , где эта точка является одной из вершин куба и в нее помещено начало координат. Уравнение момента имеет вид

$$\int_V \rho [\mathbf{x} \times (\mathbf{F} - \mathbf{a})] dV + \int_S [\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_{(n)}] dS = 0, \quad (3.2.36)$$

где V – выделенный объем, в данном случае объем куба, S – поверхность, ограничивающая выделенный объем, в данном случае это поверхность, состоящая из шести граней куба.

Момент массовых сил, определяемый объемным интегралом, оценивается аналогично (3.2.9):

$$\int_V \rho [\mathbf{x} \times (\mathbf{F} - \mathbf{a})] dV = \rho_0(F_0 - a_0) \mathcal{O}(h). \quad (3.2.37)$$

Момент поверхностных сил, определяемый вторым интегралом в (3.2.27), рассмотрим отдельно относительно осей x_1 , x_2 , x_3 или, что то же самое, рассмотрим проекцию момента (второго интеграла) на эти оси. Момент поверхностных сил относительно оси x_1 , равен

$$I_1 \mathbf{e}_1 = \int_{S_1+S_{-1}+S_2+S_{-2}+S_3+S_{-3}} [\mathbf{r}_1 \times \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n})] dS \quad (\mathbf{r}_1 = x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3, r_1 = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}), \quad (3.2.38)$$

где \mathbf{r}_1 – радиус-вектор точки от оси x_1 , являющийся вектором-проекцией вектора \mathbf{r} на плоскость $x_2 M x_3$. В этот интеграл вносят вклад составляющие напряжений σ_{ji} , не параллельные и не пересекающие ось x_1 .

На грани S_3 – это σ_{33} и σ_{23} , на грани S_{-3} – это σ_{-33} . Составляющие σ_{23} на S_3 , $-\sigma_{23}$ и $-\sigma_{13}$ на S_{-3} не вносят вклад в интеграл. Поэтому

$$I_1(S_3 + S_{-3}) = \int_{S_3+S_{-3}} \text{idem} \Rightarrow \Rightarrow \sigma_{33}(M_3) h^2 r_1(M_3) - \sigma_{33}(M_{-3}) h^2 r_1(M_{-3}) - \sigma_{23}(M_3) h^2 h. \quad (3.2.39)$$

Здесь использована теорема о среднем для интеграла по S_3 и S_{-3} : точки M_3 и M_{-3} принадлежат граням соответственно S_3 и S_{-3} . Также как и в (3.2.11) значения функций σ_{ik} в точках M_3 и M_{-3} можно выразить через их значения в точке M :

$$\sigma_{ij}(M_{13}) = \sigma_{ij}(M) + \sigma_0 \mathcal{O}\left(\frac{h}{L}\right). \quad (3.2.40)$$

Кроме того, для r_1 имеет место оценка

$$r_1(M_{23}) = \mathcal{O}(h). \quad (3.2.41)$$

Поэтому интеграл (3.2.40) имеет следующую оценку

$$I_1(S_2 + S_{-2}) = -\sigma_{23}(M) h^3 + \sigma_0 L^{-1} \mathcal{O}(h^4). \quad (3.2.42a)$$

Аналогично для той части интеграла (3.2.38), которая приходится на грани S_2 и S_{-2} :

$$\begin{aligned} I_1(S_2 + S_{-2}) &= \sigma_{22}(M_2) h^2 r_1(M_2) - \sigma_{22}(M_{-2}) h^2 r_1(M_{-2}) + \sigma_{32}(M_2) h^2 h = \\ &= \sigma_{32}(M) h^3 + \sigma_0 L^{-1} \mathcal{O}(h^4), \end{aligned} \quad (3.2.42б)$$

и на грани S_1 и S_{-1} :

$$\begin{aligned} I_1(S_1 + S_{-1}) &= \sigma_{31}(M_1) h^2 r_1(M_1) - \sigma_{21}(M_1) h^2 r_1(M_1) - \sigma_{31}(M_{-1}) h^2 r_1(M_{-1}) + \\ &+ \sigma_{21}(M_{-1}) h^2 r_1(M_{-1}) = \sigma_0 L^{-1} \mathcal{O}(h^4), \end{aligned} \quad (3.2.42в)$$

Проекция уравнения (3.2.36) на ось x_1 , или уравнение момента сил, действующих на сплошную среду в кубе, относительно оси x_1 соответствии с (3.2.38) и оценками (3.2.37), (3.2.42 а, б, в) принимает вид

$$h^3 [\sigma_{32}(M) - \sigma_{23}(M)] + [\rho_0(F_0 + a_0) + \sigma_0/L] O(h^4) = 0. \quad (3.2.43a)$$

Аналогично получаются уравнения момента сил относительно осей x_2 и x_3

$$h^3 [\sigma_{13}(M) - \sigma_{31}(M)] + [\rho_0(F_0 + a_0) + \sigma_0/L] O(h^4) = 0,$$

$$h^3 [\sigma_{21}(M) - \sigma_{12}(M)] + [\rho_0(F_0 + a_0) + \sigma_0/L] O(h^4) = 0. \quad (3.2.43б)$$

Эти уравнения справедливы для любых h . Поэтому, разделив их на h^3 и переходя к пределу $h \rightarrow 0$, получим, что в точке M , как и в любой другой произвольной точке, тензор напряжения симметричный:

$$\sigma_{32} = \sigma_{23}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31}. \quad (3.2.44)$$

Отметим, что вывод о симметрии тензора напряжений получен, исходя из уравнения моментов в виде (3.2.27), в котором проявляются моменты только массовых (векторных) сил и поверхностных (тензорных) напряжений. Для некоторых структурированных сред с ориентированным микродвижением могут проявляться распределенные внутренние массовые моменты (спины), вносящие вклад в момент количества движения материальной частицы пропорционально объему среды (или h^3 в уравнениях (3.2.43a) и (3.2.43б)). Такой же вклад в некоторых случаях могут вносить распределенные моментные пары на границе материальной частицы. В этих особых случаях может нарушиться условие симметрии тензора напряжений. (см. конец § 4 гл. 5).

Главные напряжения и главные оси (Principal stresses and principal axis) тензора напряжений.

Для любого симметричного тензора 2-го ранга существует, по меньшей мере, одна система взаимно-перпендикулярных главных осей, в которой координатные проекции – вектора этого тензора направлены вдоль этих (главных) осей. Отсюда для тензора напряжений имеет место теорема.

Теорема: Для тензора напряжений в каждой точке M существует три взаимно-перпендикулярные плоскости (с нормальными направлениями тензора напряжений), в которых действуют только нормальные напряжения (см. рис. 3.2.4)

Здесь σ_1^* , σ_2^* , σ_3^* – главные напряжения, а e_1^* , e_2^* , e_3^* – соответствующие им главные направления

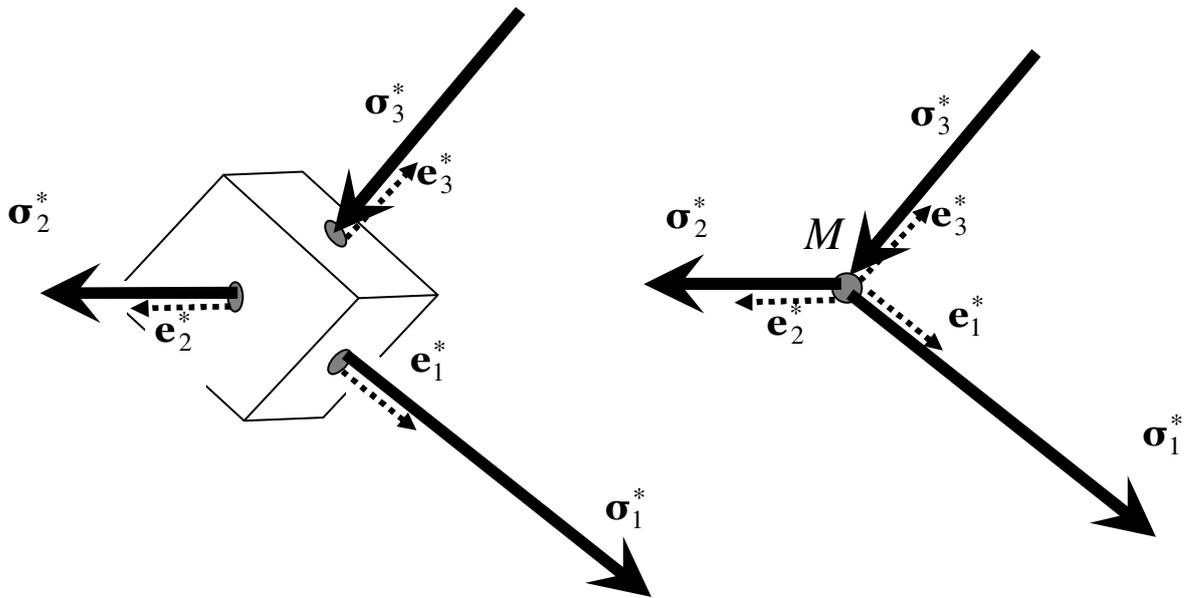


Рис. 3.2.4

$$\boldsymbol{\sigma}_1^* = \sigma_1^* \mathbf{e}_1^*, \quad \boldsymbol{\sigma}_2^* = \sigma_2^* \mathbf{e}_2^*, \quad \boldsymbol{\sigma}_3^* = \sigma_3^* \mathbf{e}_3^*. \quad (3.2.45)$$

Обычно принимается правило, по которому главные направления и главные напряжения нумеруются в порядке возрастания последних

$$\sigma_1^* \geq \sigma_2^* \geq \sigma_3^*. \quad (3.2.46)$$

Определение: Если все три главных направления не равны нулю $\sigma_i^* \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, то такое напряженное состояние называется *трехосным*. Если одно из главных напряжений равно нулю, то такое напряженное состояние называется *плоским*, или *двухосным*. Если два главных напряжения равны нулю, то напряженное состояние называется *одноосным*.

Плоское напряженное состояние определяется двумя напряжениями, которые обозначаются через σ_1^* и σ_2^* ($\sigma_3^* = 0$), причем аналогично (3.2.46) нумерация σ_1^* и σ_2^* делается так что

$$\sigma_1^* \geq \sigma_2^*, \quad \sigma_3^* = 0. \quad (3.2.47)$$

одноосное напряженное состояние определяется одним главным напряжением, которое переобозначается через σ_1^* :

$$\sigma_1^* \neq 0, \quad \sigma_2^* = \sigma_3^* = 0. \quad (3.2.48)$$

Если $\sigma_i^* > 0$, то на площадке с нормалью \mathbf{e}_i^* действует растягивающее

напряжение, если $\sigma_i^* < 0$ – то сжимающее. На рис. 3.2.4:

$$\sigma_1^* > 0, \quad \sigma_2^* > 0, \quad \sigma_3^* > 0.$$

Чтобы задать любой симметричный тензор, в том числе и тензор напряжения достаточно знать три его главные взаимно-перпендикулярные оси и три его главных значения σ_i^* ($i = 1, 2, 3$). Тогда в произвольной плоскости с нормалью $\mathbf{n} = n_i^* \mathbf{e}_i^*$ (n_i^* – проекции нормали \mathbf{n} в главных осях тензора σ), учитывая (3.2.15), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{(n)} &= \sigma_i^* n_i^* = \sigma_1^* n_1^* \mathbf{e}_1^* + \sigma_2^* n_2^* \mathbf{e}_2^* + \sigma_3^* n_3^* \mathbf{e}_3^*, \\ \sigma_{(n)}^2 &= (\sigma_1^* n_1^*)^2 + (\sigma_2^* n_2^*)^2 + (\sigma_3^* n_3^*)^2. \end{aligned} \quad (3.2.49)$$

Важной характеристикой напряженного состояния является давление, определяемое первым инвариантом тензора напряжений:

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -\frac{1}{3}\sigma_{kk}. \quad (3.2.50)$$

Давление, является инвариантом тензора напряжений и является главной характеристикой напряженного состояния в жидкостях и газах. Тензор напряжения часто разделяют на давление p и девиатор τ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}. \quad (3.2.51)$$

Задачи

1. Тензор напряжений в точке M задан в виде

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжения $\sigma_{(n)}$ в точке M на площадке с единичным вектором нормали $\mathbf{n} = \frac{3}{4}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{e}_3$; найти компоненту $\sigma_{(nm)}$, перпендикулярную площадке, и компоненту, касательную к площадке ($\sigma_{n\tau}$); вычислить модуль вектора напряжения $\sigma_{(n)}$; определить угол между $\sigma_{(n)}$ и \mathbf{n} .

2. В системе координат с базисными векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ задан тензор напряжений в виде $\sigma_{ij} = -\tau \delta_{ij}$. Определить компоненты этого тензора в прямоугольной системе с единичными векторами $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ направления которых выбраны следующим образом: ось x'_1 равно наклонена к осям x_1, x_2, x_3 , ось x'_3 образует угол 45° с осью x_3 .

3. Доказать, что $\sigma_{ij} \sigma_{ik} \sigma_{kj}$ – инвариант тензора напряжения.

4. В некоторой точке задам тензор напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственным вычислением найти первый, второй и третий инварианты тензора напряжений. Разложить тензор на шаровую ($p\delta_{ij}$) и девиаторную (τ_{ij}) составляющие ($\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$).

5. Определить главные оси и главные направления для тензора напряжений следующего вида:

$$\text{а) } \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти максимальное главное касательное напряжение и соответствующее ему главное направление.

§ 3. Нормальные и касательные напряжения и их представления через главные напряжения.

Уже отмечалось, что для напряжения $\sigma_{(n)}$, на рассматриваемой площадке с нормалью \mathbf{n} нормальная составляющая $\sigma_{(nn)}$ характеризует сопротивление среды на растяжение (если $\sigma_{(nn)} > 0$) или сжатие (если $\sigma_{(nn)} < 0$), а касательная составляющая $\sigma_{(\tau n)}$ – сопротивление среды на сдвиг. Сопротивление среды на растяжение, сжатие и сдвиг часто определяется разными физическими процессами и характеристиками вещества. Поэтому рассмотрим подробнее выражение для $\sigma_{(nn)}$ и $\sigma_{(\tau n)}$. Напомним, что на площадках, определяемых главными направлениями \mathbf{e}_1^* , \mathbf{e}_2^* , \mathbf{e}_3^* , касательные составляющие равны нулю ($\sigma_{(\tau n)}^* = 0$) и действуют только нормальные напряжения (сжатие или растяжение)

$$\sigma_{(nn)}^* = \sigma_i^*.$$

Для нормальной $\sigma_{(nn)}$ и касательной $\sigma_{(\tau n)}$ (см. (3.2.25), (3.2.26) и рис. 3.2.3) составляющих напряжения $\sigma_{(n)}$ на произвольной площадке с нормалью $\mathbf{n} = n_i^* \mathbf{e}_i^*$, (где n_i^* – проекции \mathbf{n} на главные направления тензора \mathbf{S}

имеем в соответствии с (3.2.49)

$$\sigma_{(nn)} = \boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \mathbf{n} = \sigma_1^* n_1^{*2} + \sigma_2^* n_2^{*2} + \sigma_3^* n_3^{*2}, \quad (3.3.1)$$

$$\sigma_{(\tau n)}^2 = \sigma_n^2 - \sigma_{(nn)}^2 = (\sigma_1^* n_1^*)^2 + (\sigma_2^* n_2^*)^2 + (\sigma_3^* n_3^*)^2 - [\sigma_1^* n_1^{*2} + \sigma_2^* n_2^{*2} + \sigma_3^* n_3^{*2}]^2.$$

Видно, что $\sigma_{(nn)}$ и $\sigma_{(\tau n)}$ четные функции n_1^* , n_2^* , n_3^* , т.е. не меняется при смене знака любого из $n_i^* \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$). Поэтому зависимость $\sigma_{(nn)}$ и $\sigma_{(\tau n)}$ от \mathbf{n} достаточно проанализировать при $n_i^* \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$) и при . Далее, так как $|\mathbf{n}| = 1$, то независимыми являются только n_1^* и n_2^* :

$$n_3^{*2} = 1 - n_1^{*2} - n_2^{*2}, \quad n_1^{*2} + n_2^{*2} \leq 1. \quad (3.3.2)$$

Таким образом значения $\sigma_{(nn)}(n_1^*, n_2^*)$ и $\sigma_{(\tau n)}(n_1^*, n_2^*)$ достаточно исследовать в первой четверти круга единичного радиуса в плоскости $n_1^* n_2^*$ (см. заштрихованную четверть круга на рис. 3.3.1). В остальных четвертях эти зависимости симметричны.

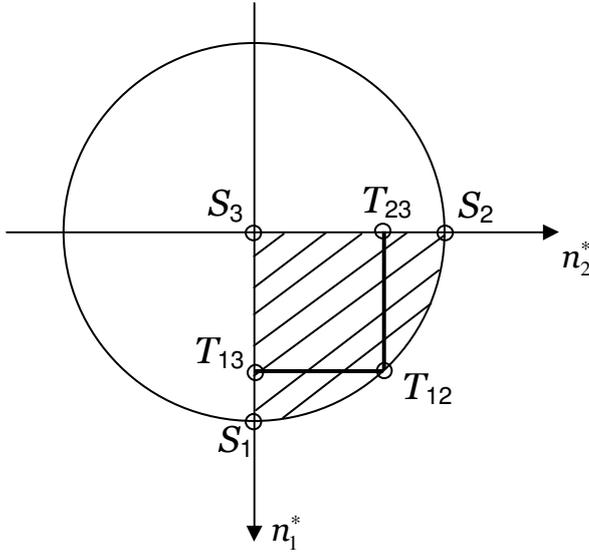


Рис. 3.3.1

Формулы (3.3.1) для $\sigma_{(nn)}(n_1^*, n_2^*)$ и $\sigma_{(\tau n)}^2(n_1^*, n_2^*)$ от двух независимых переменных представляются в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{(nn)} &= (\sigma_1^* - \sigma_3^*) n_1^{*2} + (\sigma_2^* - \sigma_3^*) n_2^{*2} + \sigma_3^*, \\ \sigma_{(\tau n)}^2 &= (\sigma_1^{*2} - \sigma_3^{*2}) n_1^{*2} + (\sigma_2^{*2} - \sigma_3^{*2}) n_2^{*2} + \sigma_3^{*2} - \\ &\quad - [(\sigma_1^* - \sigma_3^*) n_1^{*2} + (\sigma_2^* - \sigma_3^*) n_2^{*2} + \sigma_3^*]^2. \end{aligned}$$

Экстремальные значения нормальных и касательных напряжений. Отметим, что точки

$$S_1(n_1^* = 1, n_2^* = n_3^* = 0),$$

$$S_2(n_2^* = 1, n_1^* = n_3^* = 0),$$

$$S_3(n_3^* = 1, n_1^* = n_2^* = 0)$$

представляют главные направления, для которых $\sigma_{(tn)} = 0$, а $\sigma_{(nn)}$ равны соответственно σ_1^* , σ_2^* , σ_3^* , из которых σ_1^* и σ_3^* являются наибольшими и наименьшими значениями нормальных напряжений.

Заранее известно, что минимальное значение $\sigma_{(tn)}^2$, равно нулю в точках S_1 , S_2 , S_3 (см. рис. 3.3.1), соответствующих трем главным направлениям. Найдем другие возможные экстремальные значения $\sigma_{(tn)}$. Для этого найдем точки, где

$$\frac{\partial \sigma_{(tn)}^2}{\partial n_1^*} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{(tn)}^2}{\partial n_2^*} = 0 \quad (3.3.4)$$

Эти уравнения после дифференцирования (3.3.3) по n_1^* и n_2^* сводятся к следующим уравнениям:

$$2(\sigma_1^{*2} - \sigma_3^{*2})n_1^* - 2[(\sigma_1^* - \sigma_3^*)n_1^{*2} + (\sigma_2^* - \sigma_3^*)n_2^{*2} + \sigma_3^*] \cdot 2(\sigma_1^* - \sigma_3^*)n_1^* = 0,$$

$$2(\sigma_2^{*2} - \sigma_3^{*2})n_2^* - 2[(\sigma_2^* - \sigma_3^*)n_1^{*2} + (\sigma_2^* - \sigma_3^*)n_2^{*2} + \sigma_3^*] \cdot 2(\sigma_2^* - \sigma_3^*)n_2^* = 0.$$

После простейших преобразований получим

$$n_1^*(\sigma_1^* - \sigma_3^*) \{ (\sigma_1^* - \sigma_3^*) - 2[(\sigma_1^* - \sigma_3^*)n_1^{*2} + (\sigma_2^* - \sigma_3^*)n_2^{*2}] \} = 0,$$

$$n_2^*(\sigma_2^* - \sigma_3^*) \{ (\sigma_2^* - \sigma_3^*) - 2[(\sigma_2^* - \sigma_3^*)n_1^{*2} + (\sigma_2^* - \sigma_3^*)n_2^{*2}] \} = 0. \quad (3.3.5)$$

Одним из возможных решений этой системы относительно n_1^* и n_2^* является

$$n_1^* = n_2^* = 0, \quad n_3^* = 1. \quad (3.3.6)$$

Этому решению соответствует $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3^*$ (точка S_3 на рис. 3.3.1), т.е., главному направлению тензора \mathbf{S} , так что $\sigma_{(tn)} = 0$, и реализуется минимум для $\sigma_{(tn)}$.

Рассмотрим возможные решения (3.3.5), когда $n_1^* = 0$, но $n_2^* \neq 0$. В этом случае первое уравнение (3.3.5) выполняется при любых n_2^* , а из второго получаем

$$(\sigma_2^* - \sigma_3^*)(1 - 2n_2^{*2}) = 0.$$

Если $\sigma_2^* \neq \sigma_3^*$, то

$$n_1^* = 0, \quad n_2^* = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n_3^* = \sqrt{1 - n_1^{*2} - n_2^{*2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3.3.7)$$

Этому направлению, отмеченному точкой T_{23} на рис. 3.3.1 соответствует экстремальное значение $\sigma_{(\tau n)}$, которое согласно (3.3.3) и правилу нумерации (3.3.6) равно

$$\sigma_{(\tau n)}^2 = \frac{1}{4}(\sigma_2^* - \sigma_3^*)^2 \quad \text{или} \quad \sigma_{(\tau n)} = \frac{1}{2}(\sigma_2^* - \sigma_3^*). \quad (3.3.8)$$

Если $\sigma_2^* = \sigma_3^*$, то второе уравнение (3.3.5) (как и первое) выполняется при любых n_2^* , т.е. в плоскости $x_2^* x_3^*$ (или, что то же самое, в плоскости $e_2^* e_3^*$), где $n_1^* = 0$, любое направление является главным и $\sigma_{(\tau n)} = 0$ (см. также (3.3.3)).

Рассмотрим возможные решения, когда $n_2^* = 0$, но $n_1^* \neq 0$. В этом случае аналогично (3.3.7), (3.3.8) получим

$$n_1^* = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n_2^* = 0, \quad n_3^* = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3.3.9)$$

Этому направлению, отмеченному точкой T_{13} соответствует экстремальное значение $\sigma_{(\tau n)}$, которое равно

$$\sigma_{(\tau n)} = \frac{1}{2}(\sigma_1^* - \sigma_3^*). \quad (3.3.10)$$

Если $\sigma_1^* = \sigma_3^*$, то в соответствии с правилом о нумерации (см. 3.2.46) имеем $\sigma_1^* = \sigma_2^* = \sigma_3^*$ и любое направление \mathbf{n} является главным, т.е. для любых \mathbf{n} имеем $\sigma_{(\tau n)} = 0$ (см. также (3.3.3)).

Аналогично с направлениями $n_1^* = 0$ и $n_2^* = 0$ рассмотрим направление

$$n_1^* = n_2^* = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n_3^* = 0. \quad (3.3.11)$$

Этому направлению, которое отмечено на рис. 3.3.1 точкой T_{12} , соглас-

но (3.3.3) соответствует

$$\sigma_{(\tau n)} = \frac{1}{2} (\sigma_1^* - \sigma_2^*). \quad (3.3.12)$$

Заметим, что точка T_{12} лежит на границе рассматриваемой области, и частные производные $\sigma_{(\tau n)}^2$ по n_1^* и n_2^* не равны нулю (см. (3.3.5)), но частные производные $\sigma_{(\tau n)}^2$ по n_1^* и n_2^* равны нулю, поэтому значение (3.3.12) является экстремальным, и, как будет показано ниже, – максимуму.

Если $\sigma_1^* = \sigma_2^*$, то в плоскости $x_1^* x_2^*$ (или, что тоже самое, в плоскости $e_1^* e_2^*$), где $n_3^* = 0$, любое направление является главным и $\sigma_{(\tau n)} = 0$ (см. также (3.3.3)). Можно показать, что других экстремальных значений $\sigma_{(\tau n)}$ кроме перечисленных в (3.3.6), (3.3.7), (3.3.9) и (3.3.11) – нет.

Определение. Направления

- 1) $n_1^* = 0, n_2^* = n_3^* = \frac{\sqrt{2}}{2}$, где $\sigma_{(\tau n)} = \frac{1}{2} (\sigma_2^* - \sigma_3^*)$,
- 2) $n_2^* = 0, n_1^* = n_3^* = \frac{\sqrt{2}}{2}$, где $\sigma_{(\tau n)} = \frac{1}{2} (\sigma_1^* - \sigma_3^*)$,
- 3) $n_3^* = 0, n_1^* = n_2^* = \frac{\sqrt{2}}{2}$, где $\sigma_{(\tau n)} = \frac{1}{2} (\sigma_1^* - \sigma_2^*)$

$$(3.3.13)$$

называются главными направлениями касательных напряжений, а соответствующие значения $\sigma_{(\tau n)}$, являющиеся экстремальными, называются главными значениями касательных напряжений.

Геометрическое представление напряженного состояния с помощью тензорной поверхности Коши. В соответствии с § 10 гл. 1 в каждой материальной точке сплошной среды M , в которой определен тензор напряжения $\mathfrak{S} = \sigma_{ij} e_i e_j$ можно ввести тензорную функцию и тензорную поверхность второго порядка, называемую *поверхностями напряжения Коши* относительно координат $z_i, (i = 1, 2, 3)$, отсчитываемых от точки M :

$$F(z_1, z_2, z_3) = \sigma_{ij} z_i z_j, \quad \sigma_{ij} z_i z_j - C = \text{const} . \quad (3.3.14)$$

Выделим две из них: первая, которая соответствует $C = L_0^2 \sigma_0$ и обозначается через $F^{(+)}$, и вторая, которая соответствует $C = -L_0^2 \sigma_0$ и обозначается через $F^{(-)}$, где $\sigma_0 > 0$ и $L_0 > 0$ – некоторые положительные масштабные значе-

ния напряжения и линейных размеров в исследуемой проблеме. Таким образом распределение напряжений в сплошной среде геометрически представляется как распределение тензорных поверхностей второго порядка $F^{(+)}$ и $F^{(-)}$, определенных вокруг каждой точке сплошной среды.

Для трехосного напряженного состояния ($\sigma_i^* \neq 0$, $i = 1, 2, 3$) в точке:

- если $\sigma_i^* > 0$ ($i = 1, 2, 3$), то $F^{(+)}$ – эллипсоид, $F^{(-)}$ – мнимая поверхность;
- если $\sigma_i^* < 0$ ($i = 1, 2, 3$), то $F^{(+)}$ – мнимая поверхность, $F^{(-)}$ эллипсоид,
- если σ_i^* – разного знака ($i = 1, 2, 3$), то $F^{(+)}$ и $F^{(-)}$ – гиперboloиды.

Для плоского напряженного состояния ($\sigma_i^* = 0$, см. (3.2.47)) $F^{(+)}$ и $F^{(-)}$ – цилиндры, параллельные оси x_i^* (или вектору \mathbf{e}_3^*):

- если $\sigma_1^*, \sigma_2^* > 0$, то $F^{(+)}$ – эллиптический цилиндр, $F^{(-)}$ – мнимая поверхность;
- если $\sigma_1^*, \sigma_2^* < 0$, то $F^{(+)}$, $F^{(-)}$ – гиперболические цилиндры.

Для одноосного напряженного состояния ($\sigma_2^* = \sigma_3^* = 0$, см. (3.2.48)):

- если $\sigma_1^* > 0$, то $F^{(+)}$ – пара параллельных осям x_2^* и x_3^* (или \mathbf{e}_2^* , \mathbf{e}_3^*) плоскостей, $F^{(-)}$ – мнимая поверхность;
- если $\sigma_1^* < 0$, то $F^{(+)}$ – мнимая поверхность, $F^{(-)}$ пара параллельных осям x_2^* и x_3^* (или \mathbf{e}_2^* , \mathbf{e}_3^*) плоскостей.

Аналогично (1.10.4) нетрудно показать, что

$$\sigma_{(n)} = \frac{1}{2Z} \text{grad } F (z = \sqrt{z_i z_i}, \mathbf{z} = z \mathbf{n}). \quad (3.3.15)$$

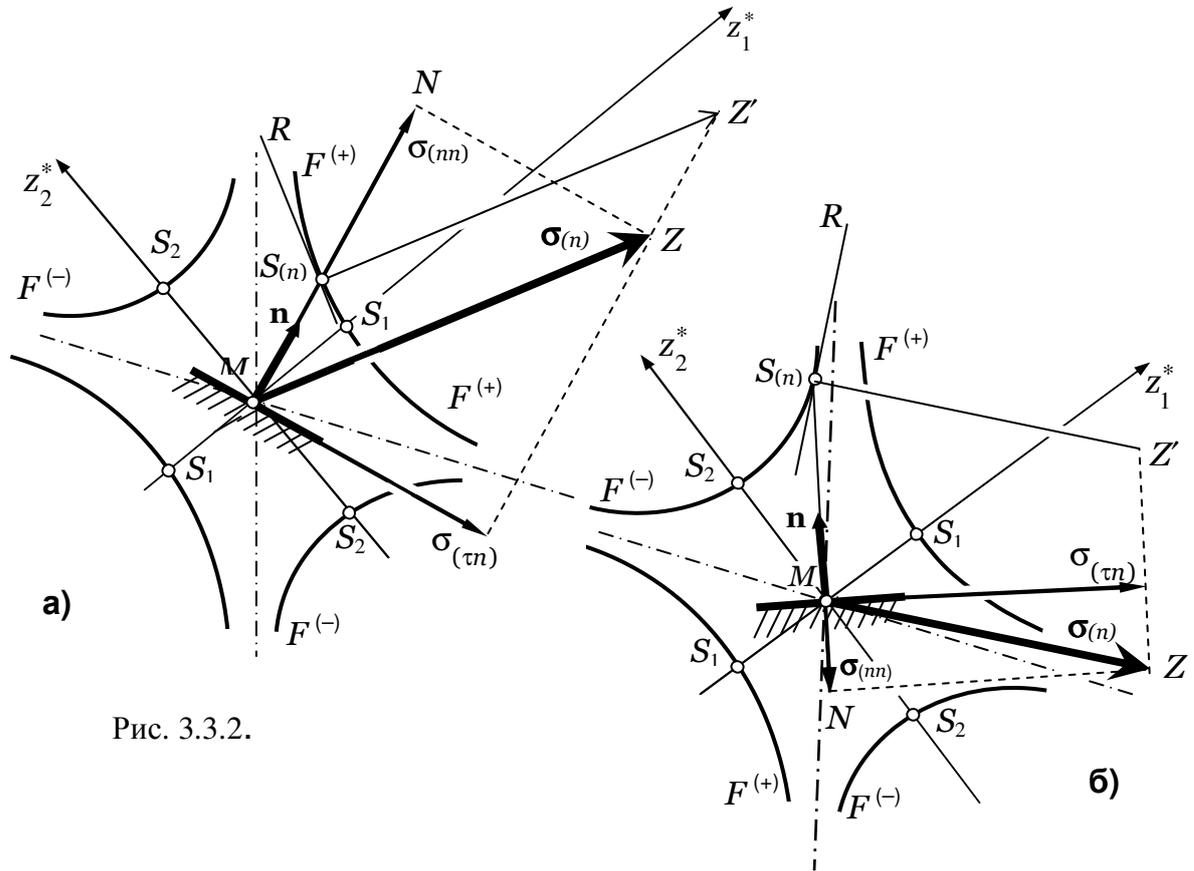


Рис. 3.3.2.

Следует иметь в виду, что если для трехосных напряженных состояний поверхности напряжений – пространственные, и эти поверхности могут быть использованы лишь для наглядного и качественного представления распределения $\sigma_{(n)}$, $\sigma_{(nn)}$, $\sigma_{(tn)}$ по направлениям площадок \mathbf{n} , то для двухосного и одноосного напряженных состояний зависимость $\sigma_{(n)}$, $\sigma_{(nn)}$, $\sigma_{(tn)}$ от \mathbf{n} при $\mathbf{n} = n_1^* \mathbf{e}_1^* + n_2^* \mathbf{e}_2^*$ ($n_3^* = 0$) с помощью поверхности напряжений сводится к плоской диаграмме, получающейся сечением поверхностей напряжений плоскостью, параллельной \mathbf{e}_2^* и \mathbf{e}_3^* .

На рис. 3.3.2 приведена получающаяся диаграмма для плоского напряженного состояния в материальной точке M , когда $\sigma_1^* < 0$, $\sigma_2^* < 0$. В этом случае и $F^{(+)}$, $F^{(-)}$ гиперболические цилиндры, параллельные оси z_3^* (т.е. x_3^*), которая перпендикулярна плоскости чертежа, проходящей через оси z_1^* , z_2^* (т.е. x_1^* , x_2^*):

$$\sigma_1^* z_1^{*2} + \sigma_2^* z_2^{*2} = \pm \sigma_0 L_0^2. \quad (3.3.16)$$

В плоскости чертежа показаны сечения цилиндров плоскостью $z_3^* = 0$ (т.е. $x_3^* = x_3^{*(M)}$), которые можно называть линиями напряжений. Точка $S_{(n)}$ – точка пересечения нормали \mathbf{n} (когда \mathbf{n} в плоскости $\mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_2^*$) к выделенной штриховой площадке с линией напряжений (на рис. 3.3.2а – точка $S_{(n)}$ на линии $F^{(+)}$, на рис. 3.3.2б – точка $S_{(n)}$, на $F^{(-)}$). Линия $S_{(n)}R$ – касательная к $F^{(+)}$ (рис. 3.3.2а) и к $F^{(-)}$ (рис. 3.3.2б) в точке S_n . Далее линия $S_{(n)}Z'$ определяющая направление σ_n проводится перпендикулярно к касательной $S_{(n)}R$ в сторону $\text{grad } F$, т.е. в сторону возрастания F : от $F^{(-)}$ и $F^{(+)}$.

В связи с этим на рис. 3.3.2а имеем $\sigma_{(nn)} > 0$, а на рис. 3.3.2б имеем $\sigma_{(nn)} < 0$.

Линия MZ параллельна $S_{(n)}Z'$, и она определяет направление $\sigma_{(n)}$ из точки M – являющейся центром рассматриваемого (заштрихованного) сечения с нормалью \mathbf{n} . Длина MZ , определяющая величину напряжения $\sigma_{(n)}$, находится по длине проекции $\sigma_{(nn)}$ показанной отрезком MN . Учитывая формулу (3.2.25) и связь между \mathbf{z} и \mathbf{n} ($\mathbf{z} = z \mathbf{n}$) имеем

$$\sigma_{(nn)} = \sigma_{ij} n_i n_j = \sigma_{ij} (z_i / z) (z_j / z) = (\sigma_{ij} z_i z_j) z^{-2} \quad (z_i = x_i - x_i^{(M)}).$$

Так как на тензорных поверхностях $F^{(+)}$ и $F^{(-)}$ имеем $|\sigma_{ij} z_i z_j| = \sigma_0 L_0^2$, то

$$|\sigma_{(nn)}| = \sigma_0 L_0^2 z^{-2} \quad (z^2 = z_1^2 + z_2^2). \quad (3.3.17)$$

Поэтому по значениям σ_1^* и σ_2^* определяющих величины отрезков MS_1 ($z_2^* = 0$) и MS_2 ($z_1^* = 0$) в соответствии с (3.3.16):

$$\sigma_1^* |MS_1|^2 = \sigma_2^* |MS_2|^2 = \sigma_0 L_0^2, \quad (3.3.18)$$

получим

$$\sigma_{(nn)} = \sigma_1^* \frac{|MS_1|^2}{|MS_{(n)}|^2}. \quad (3.3.19)$$

Геометрическое представление напряженного состояния с помо-

щью диаграммы Мора¹. Помимо трехмерной тензорной поверхности напряжений Коши используется двухмерная (плоская) диаграмма Мора, позволяющая с помощью простейших и наглядных построений по заданным значениям главных напряжений σ_1^* , σ_2^* , σ_3^* , находить касательные и нормальные напряжения на любых площадках, заданных относительно главных направлений через проекции (n_1^*, n_2^*, n_3^*) , причем не только для двухосных, но и для трехосных напряженных состояний.

Метод диаграммы Мора основан на уравнениях (3.3.1), которые с учетом условия $|\mathbf{n}| = 1$ можно представить в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно n_i^{*2} ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} n_1^{*2} + n_2^{*2} + n_3^{*2} &= 1, \\ \sigma_1^* n_1^{*2} + \sigma_2^* n_2^{*2} + \sigma_3^* n_3^{*2} &= \sigma_{(mn)}, \\ \sigma_1^{*2} n_1^{*2} + \sigma_2^{*2} n_2^{*2} + \sigma_3^{*2} n_3^{*2} &= \sigma_{(nn)}^2 + \sigma_{(tn)}^2 \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Определители этой системы является определителем Вандермонда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1^* & \sigma_2^* & \sigma_3^* \\ \sigma_1^{*2} & \sigma_2^{*2} & \sigma_3^{*2} \end{vmatrix} = (\sigma_1^* - \sigma_2^*)(\sigma_2^* - \sigma_3^*)(\sigma_1^* - \sigma_3^*).$$

Подсчитаем определитель для n_1^{*2} :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_{(mn)} & \sigma_2^* & \sigma_3^* \\ \sigma_{(nn)}^2 + \sigma_{(tn)}^2 & \sigma_2^{*2} & \sigma_3^{*2} \end{vmatrix} = \sigma_2^* \sigma_3^* + \sigma_3^* (\sigma_{(nn)}^2 + \sigma_{(tn)}^2) + \sigma_2^{*2} \sigma_{(mn)} - \\ &\quad - (\sigma_{(nn)}^2 + \sigma_{(tn)}^2) \sigma_2^* - \sigma_3^* \sigma_2^{*2} - \sigma_3^{*2} \sigma_{(mn)} = \\ &= (\sigma_3^* - \sigma_2^*) (\sigma_{(nn)}^2 + \sigma_{(tn)}^2) - \sigma_{(mn)} (\sigma_3^{*2} - \sigma_2^{*2}) + \sigma_2^{*2} \sigma_3^{*2} (\sigma_3^{*2} - \sigma_2^{*2}) = \\ &= (\sigma_3^* - \sigma_2^*) (\sigma_{(nn)}^2 + \sigma_{(tn)}^2) - \sigma_{(mn)} \sigma_3^* - \sigma_{(mn)} \sigma_2^* + \sigma_2^* \sigma_3^* = \\ &= (\sigma_3^* - \sigma_2^*) (\sigma_{(tn)}^2 + \sigma_{(nn)} (\sigma_{(nn)} - \sigma_3^*) - \sigma_2^* (\sigma_{(mn)} - \sigma_3^*)) = \\ &= (\sigma_3^* - \sigma_2^*) (\sigma_{(tn)}^2 + (\sigma_{(nn)} - \sigma_2^*) (\sigma_{(nn)} - \sigma_3^*)). \end{aligned}$$

Аналогично находя Δ_2 и Δ_3 (это можно делать методом перестановки

¹ Этот раздел не входит в обязательный курс.

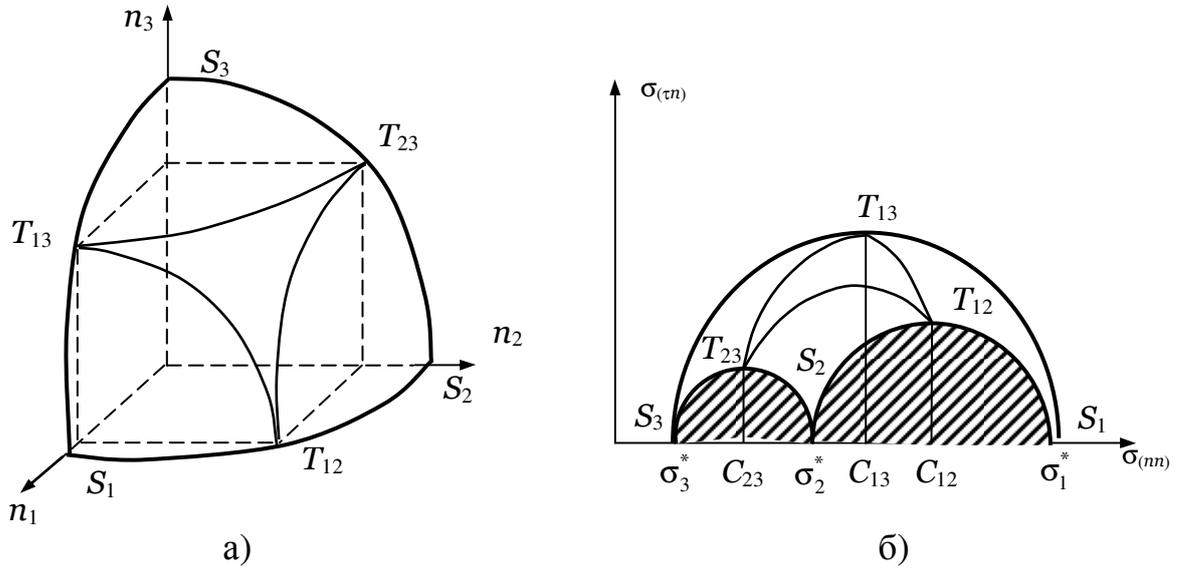


Рис. 3.3.3.

индексов, учитывая их равноправие), получим решение системы (3.3.20)

$$\begin{aligned}
 n_1^{*2} &= \frac{\sigma_{(\tau n)}^2 + (\sigma_{(nn)} - \sigma_2^*)(\sigma_{(nn)} - \sigma_3^*)}{(\sigma_2^* - \sigma_1^*)(\sigma_3^* - \sigma_1^*)}, \\
 n_2^{*2} &= \frac{\sigma_{(\tau n)}^2 + (\sigma_{(nn)} - \sigma_3^*)(\sigma_{(nn)} - \sigma_1^*)}{(\sigma_3^* - \sigma_2^*)(\sigma_1^* - \sigma_2^*)}, \\
 n_3^{*2} &= \frac{\sigma_{(\tau n)}^2 + (\sigma_{(nn)} - \sigma_1^*)(\sigma_{(nn)} - \sigma_2^*)}{(\sigma_1^* - \sigma_3^*)(\sigma_2^* - \sigma_3^*)}.
 \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Из выражения для n_3^{*2} имеем

$$\sigma_{(\tau n)}^2 + (\sigma_{(nn)} - \sigma_1^*)(\sigma_{(nn)} - \sigma_2^*) = (\sigma_1^* - \sigma_3^*)(\sigma_2^* - \sigma_3^*)n_3^{*2}.$$

Левая часть этого уравнения может быть представлена в виде

$$\sigma_{(\tau n)}^2 + \left(\sigma_{(nn)} - \frac{\sigma_1^* + \sigma_2^*}{2} \right)^2 - \frac{(\sigma_1^* - \sigma_2^*)^2}{4}.$$

Тогда получим

$$\sigma_{(\tau n)}^2 + (\sigma_{(nn)} - C_{12})^2 = R_{12}^2, \tag{3.3.22a}$$

$$C_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1^* + \sigma_2^*), \quad R_{12}^2 = \frac{1}{4}(\sigma_1^* - \sigma_2^*)^2 + (\sigma_1^* - \sigma_3^*)(\sigma_2^* - \sigma_3^*)n_3^{*2}.$$

Аналогично из выражения для n_2^{*2} получим,

$$\sigma_{(\tau n)}^2 + (\sigma_{(nn)} - C_{13})^2 = R_{13}^2, \tag{3.3.22б}$$

$$C_{13} = \frac{1}{2} (\sigma_1^* + \sigma_3^*), \quad R_{13}^2 = \frac{1}{4} (\sigma_1^* - \sigma_3^*)^2 + (\sigma_1^* - \sigma_2^*)(\sigma_3^* - \sigma_2^*)n_2^{*2}.$$

А из выражения для n_1^{*2} получим

$$\sigma_{(\tau n)}^2 + (\sigma_{(nn)} - C_{23})^2 = R_{23}^2, \quad (3.3.22в)$$

$$C_{23} = \frac{1}{2} (\sigma_2^* + \sigma_3^*), \quad R_{23}^2 = \frac{1}{4} (\sigma_2^* - \sigma_3^*)^2 + (\sigma_2^* - \sigma_1^*)(\sigma_3^* - \sigma_1^*)n_1^{*2}.$$

На рис. 3.3.3 показано отображение $\sigma_{(nn)}(n_1^*, n_2^*, n_3^*)$, $\sigma_{(\tau n)}(n_1^*, n_2^*, n_3^*)$, т.е. отображение множества возможных значений n_1^* , n_2^* , n_3^* , лежащих на поверхности единичной сферы (рис. 3.3.3а) на плоскость напряжений $\sigma_{(nn)}$, $\sigma_{(\tau n)}$ (рис. 3.3.3б), а конкретнее – на верхнюю полуплоскость, т.к. знак $\sigma_{(\tau n)}$ не имеет значения. Указанное отображение соответствует уравнениям (3.3.20) и следующим из них уравнениям (3.3.22 а, б, в). Это отображение позволяет с помощью простейших графических построений находить значение нормального и касательного напряжений $\sigma_{(nn)}$, $\sigma_{(\tau n)}$ на любой площадке, определяемой нормали и главные направления. При отображении буквенные обозначения соответствующих точек сохраняются: $S_i \rightarrow S_i$, $T_{ij} \rightarrow T_{ij}$.

Главным направлениям (точки S_1, S_2, S_3 в пространстве n_1^*, n_2^*, n_3^*) соответствуют точки S_1, S_2, S_3 на оси $\sigma_{(nn)}$ с координатами $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$.

Согласно (3.3.22а) при заданных $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$ при фиксированном значении n_3^* (дуга типа $T_{13}T_{23}$ на рис. 3.3.3а на плоскости напряжений получается окружность с центром на оси $\sigma_{(nn)}$ в точке $\sigma_{(nn)} = C_{12}$ (см. рис. 3.3.3б) и радиусом $R_{12}(n_3^*)$. Причем минимальное значение R_{12} реализуется при $n_3^* = 0$ и оно равно

$$(R_{12})_{\min} \equiv R_{12}^\circ = \frac{1}{2} (\sigma_1^* - \sigma_2^*). \quad (3.3.23а)$$

Поэтому возможные значения $(\sigma_{(nn)}, \sigma_{(\tau n)})$ лежат вне полуокружности $S_2T_{21}S_1$ с центром в C_{12} и радиусом R_{12}° .

Аналогично дуги типа $T_{12}T_{23}$ (n_2^* – фиксировано, см.(3.3.22б) в плоскости напряжений отображаются на окружности с центром в точке $\sigma_{(nn)} = C_{13}$ и радиусом $R_{13}(n_2^*)$. Максимальное значение R_{13} реализуется при $n_2^* = 0$ (дуга

S_1S_3).

$$(R_{13})_{\max} \equiv R_{13}^{\circ} = \frac{1}{2} (\sigma_1^* - \sigma_3^*), \quad (3.3.23б)$$

а возможные значения $(\sigma_{(nn)}, \sigma_{(\tau n)})$ лежат внутри полуокружности $S_3T_{13}S_1$ с центром в C_{13} и радиусом R_{13}° .

Дуги типа $T_{13}T_{12}$ (n_1^* – фиксировано, см. (3.3.22в)) в плоскости напряжений отображаются на полуокружности с центром в точке $\sigma_{(nn)} = C_{23}$ и радиусом $R_{23}(n_1^*)$. Минимальное значение R_{23} реализуется при $n_1^* = 0$ (дуга S_3S_2):

$$(R_{23})_{\min} \equiv R_{23}^{\circ} = \frac{1}{2} (\sigma_2^* - \sigma_3^*), \quad (3.3.23в)$$

А возможные значения $(\sigma_{(nn)}, \sigma_{(\tau n)})$ лежат вне окружности $S_3T_{23}S_2$ с центром в C_{23} и радиусом R_{23}° .

Таким образом, возможные значения могут определяться точками только внутри не заштрихованной области на рис. 3.3.3б.

Отметим, что в точках $T_{12}T_{23}T_{13}$ (см. рис. 3.3.1 и 3.3.3) реализуются экстремальные или главные значения касательных напряжений (см. анализ в связи с рис. 3.3.1), равные соответственно R_{12}° , R_{23}° , R_{13}° . Причем последнее значение $\sigma_{(\tau n)} = R_{13}^{\circ} = \frac{1}{2} (\sigma_1^* - \sigma_3^*)$ есть максимально возможное значение касательного напряжения, которое реализуется для $n_1^* = n_3^* = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $n_2^* = 0$, т.е. в плоскости, проходящей через ось и наклонной под углом 45° к оси.

Равносторонний сферический треугольник $T_{12}T_{13}T_{23}$, вершины которого определяют главные направления относительно касательного напряжения, отображается в треугольнике $T_{12}T_{13}T_{23}$, стороны которого являются дугами окружности с центром в C_{23} , C_{12} , C_{13} (дуга $T_{12}T_{13}$ имеет центр в C_{23} , дуга $T_{13}T_{23}$ – в C_{12} , дуга $T_{12}T_{23}$ – в C_{13}), а вершины дают экстремальные касательные напряжения.

Рассмотрим в соответствии с (3.3.20) подробнее отображение дуги $S_1E_{12}S_2$ (рис. 3.3.4а), соответствующей $n_3^* = 0$ и отображающейся на полуокружность $S_1E_{12}S_2$ в плоскости напряжений (рис. 3.3.4б).

$$n_1^* = 0, \quad n_2^* = \cos \psi, \quad n_3^* = \sin \psi \quad (\psi = \arccos n_2^*)$$

Тогда для дуги S_2S_3 , в плоскости напряжений получим

$$\sigma_{(mn)} = C_{23} + R_{23}^\circ \cos 2\psi, \quad \sigma_{(\tau n)} = R_{23}^\circ \cos 2\psi. \quad (3.3.24б)$$

Поэтому точка B_{23} , определяемая углом ψ , отложенным вдоль дуги S_2S_3 , в плоскости напряжений отобразится в точку B_{23} , определяемую удвоенным углом (2ψ), отложенным вдоль дуги S_2S_3 с центром в точке C_{23} .

Дуга $B_{23}B_{12}$ в плоскости напряжений отображается на дугу окружности с центром в точке C_{13} . Так как одна точка этой дуги и ее центр известны, то все отображение также находится.

В итоге если нужно найти отображение произвольной точки S_n , лежащей на сфере единичного радиуса в пространстве $n_1 n_2 n_3$, то по ее координатам n_1^* и n_2^* определяются углы φ и ψ :

$$\varphi = \arccos n_1^*(S_n), \quad \psi = \arccos n_2^*(S_n). \quad (3.3.25)$$

По углу φ можно найти точку E_{12} , для которой $n_1^*(E_{12}) = \cos \varphi = n_1^*(S_n)$, $n_2^*(E_{12}) = \sin \varphi$, $n_3^*(E_{12}) = 0$. В плоскости напряжений E_{32} определяется углом $2\varphi = 2 \arccos n_1^*(E_{12}) = 0$, который откладывается вдоль дуги S_1S_2 от точки S_1 вокруг центра C_{12} . По углу ψ , определенному в (3.3.25), можно найти точку B_{23} , для которой $n_1^*(B_{23}) = 0$, $n_2^*(B_{23}) = \cos \psi = n_2^*(S_n)$, $n_3^*(B_{23}) = \sin \psi$. В плоскости напряжений B_{23} определяется углом $2\psi = 2 \arccos n_2^*(S_n)$, который откладывается вдоль дуги S_2S_3 от точки S_2 вокруг центра C_{23} .

Найдя в плоскости напряжений точку E_{12} легко построить дугу $E_{12}E_{13}$ как дугу окружности из центра C_{23} радиуса $R_{23} = C_{23} E_{12}$. Аналогично по B_{23} строится дуга $B_{23}B_{12}$ как дуга окружности из центра C_{13} радиуса $R_{13} = C_{13} B_{23}$. Пересечение этих двух дуг и определяет точку в плоскости напряжений.

Таким образом, с помощью диаграммы Мора, зная значения главных напряжений $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$, легко графически найти значения нормального $\sigma_{(mn)}$ и касательного $\sigma_{(\tau n)}$ напряжений для любой площадки S_n , определяемый направлением единичной нормали, т.е. значениями n_1^*, n_2^*, n_3^* . Для этого нужно

графически строить углы φ и ψ по их косинусам ($\cos \varphi = n_1^*$, $\cos \psi = n_2^*$), далее откладывать 2φ и 2ψ на плоскости напряжений, строить дуги окружностей типа $B_{12}B_{23}$ и $E_{12}E_{13}$ и находить их пересечение (точка S_n), абсцисса и ордината которой определяют $\sigma_{(nn)}$ и $\sigma_{(\tau n)}$.

Задачи

1. Найти поверхность напряжения Коши в точке M для следующих состояний напряжения:

а) всестороннее равномерное растяжение (сжатие)

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij};$$

б) одноосное растяжение (сжатие)

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma, & i = j = 1 \\ 0, & i \neq j, i = j \neq 1 \end{pmatrix};$$

в) простой сдвиг

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \text{остальные } \sigma_{ij} \neq 0;$$

г) плоское напряженное состояние

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau, \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{33} = 0.$$

2. Показать, что для напряженного состояния, заданного тензором

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

поверхность напряжения Коши будет эллипсоидом, если a , b , c имеют одинаковые знаки.

3. В некоторой точке задан тензор напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построить круги Мора. Отметить важнейшие точки. Установить связь между системой осей координат $Ox_1x_2x_3$ (соответствующей компонентам σ_{ij}) и главными осями и нанести на диаграмму Мора точки, характеризующие напряженное состояние на координатных плоскостях системы $Ox_1x_2x_3$. Определить компоненты вектора напряжения ($\sigma_{(nn)}$, $\sigma_{(\tau n)}$) на площадке с единичной нормалью $\mathbf{n} = \frac{2}{3} \mathbf{e}_1 + \frac{2}{3} \mathbf{e}_2 + \frac{2}{3} \mathbf{e}_3$.

4. Построить круги Мора и определить максимальное касательное напряжения для следующих напряжений состояний:

$$\text{a) } \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tau & \tau & 0 \\ \tau & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & -2\tau \end{pmatrix}.$$